香港考試及評核局
HONG KONG EXAMINATIONS AND ASSESSMENT AUTHORITY

2012年香港中學文憑考試
HONG KONG DIPLOMA OF SECONDARY EDUCATION EXAMINATION 2012

數學 延伸部分
單元一（微積分與統計）

MATHEMATICS Extended Part
Module 1 (Calculus and Statistics)

評卷參考

MARKING SCHEME

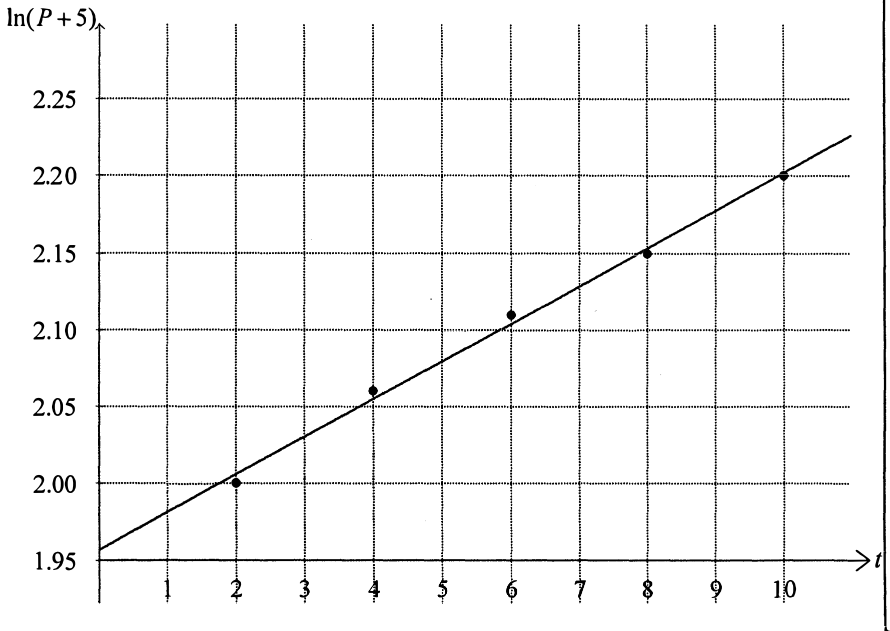
本評卷參考乃香港考試及評核局專爲今年本科考試而編寫，供閱卷員參考之用。閱卷員在完成閱卷工作後，若將本評卷參考提供其任教會考班的本科同事參閱，本局不表反對，但須切記，在任何情況下均不得容許本評卷參考落入學生手中。學生若索閱或求取此等文件，閱卷員/教師應嚴詞拒絕，因學生極可能將評卷參考視爲標準答案，以致但知硬背死記，活剝生吞。這種落伍的學習態度，既不符現代教育原則，亦有違考試着重理解能力與運用技巧之旨。因此，本局籲請各閱卷員/教師通力合作，堅守上述原則。

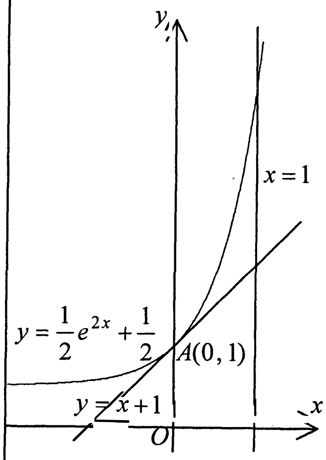
This marking scheme has been prepared by the Hong Kong Examinations and Assessment Authority for markers' reference. The Authority has no objection to markers sharing it, after the completion of marking, with colleagues who are teaching the subject. However, under no circumstances should it be given to students because they are likely to regard it as a set of model answers. Markers/teachers should therefore firmly resist students' requests for access to this document. Our examinations emphasise the testing of understanding, the practical application of knowledge and the use of processing skills. Hence the use of model answers, or anything else which encourages rote memorisation, should be considered outmoded and pedagogically unsound. The Authority is counting on the co-operation of markers/teachers in this regard.

解	分	備註
1. (a) $(1+3x)^n = 1+C_1^n(3x)+C_2^n(3x)^2+\cdots$		
$= 1+3nx+\frac{9n(n-1)}{2}x^2+\cdots$	1A	
(b) $e^{-2x}(1+3x)^n = \left[1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+3nx+\frac{9n(n-1)}{2}x^2+\cdots\right]$	1A	給 $1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+\cdots$
$=(1-2x+2x^2+\cdots)\left[1+3nx+\frac{9n(n-1)}{2}x^2+\cdots\right]$		
$\therefore\ 1\cdot\frac{9n(n-1)}{2}+(-2)(3n)+2\cdot 1=62$	1M	
$9n^2-21n-120=0$		
$n=5\ \boxed{\text{或 } \frac{-8}{3}\text{（捨去）}}$	1A	
	(4)	
2. 設 $u=4t+1$。	1M	
$\mathrm{d}u=4\mathrm{d}t$		
當 $t=0$，$u=1$；當 $t=2$，$u=9$。		
該單位價值的改變		
$=\int_0^2\frac{t}{\sqrt{4t+1}}\mathrm{d}t$	1M	
$=\int_1^9\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{u-1}{4}\frac{\mathrm{d}u}{4}$		
$=\frac{1}{16}\int_1^9\left(\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\mathrm{d}u$		
$=\frac{1}{16}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$	1A	給 $\frac{1}{16}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}\right]$
$=\frac{5}{6}$	1A	
因此，改變的百分數 $=\frac{\frac{5}{6}}{3}\times100\%$		
$=27\frac{7}{9}\%$	1A	或 27.7778%
	(5)	
3. (a) $P=ae^{\frac{kt}{40}}-5$		
$\ln(P+5)=\frac{k}{40}t+\ln a$	1A	
(b)		

t	2	4	6	8	10
P	2.36	2.81	3.23	3.55	4.01
$\ln(P+5)$	2.00	2.06	2.11	2.15	2.20

解	分	備註
	1M	
根據下一頁的圖像，$\ln a\approx1.96$	1M	任何一式
$a\approx7$		
$\frac{k}{40}\approx\frac{2.21-1.96}{10-0}$		
$k\approx1$	1A	給 a 和 k

解	分	備註
	1A	
	(5)	
4. (a) $y=\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}$		
$\ln y=\frac{1}{3}\ln(3x-1)-\frac{1}{3}\ln(x-2)$	1A	
∴ $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3(x-2)}$	1A	
(b) 根據(a)，$\frac{dy}{dx}=\left[\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3(x-2)}\right]\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}$	1A	
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3(x-2)}\right]\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}+\left[\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3(x-2)}\right]\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}\right)$		
$=\left[\frac{-3}{(3x-1)^2}+\frac{1}{3(x-2)^2}\right]\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}+\left[\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{3(x-2)}\right]^2\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}$ 根據(a)	1M	給使用(a)
當 $x=3$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{-3}{(3\cdot3-1)^2}+\frac{1}{3(3-2)^2}+\left[\frac{1}{3\cdot3-1}-\frac{1}{3(3-2)}\right]^2\right\}\sqrt[3]{\frac{3\cdot3-1}{3-2}}$	1M	
<u>另解</u>		
當 $x=3$，$y=2$，由此得 $\frac{dy}{dx}=\frac{-5}{12}$。	1A	給 y 和 $\frac{dy}{dx}$
根據(a)，$\frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{(3x-1)^2}+\frac{1}{3(x-2)^2}$	1M	給鏈式法則
當 $x=3$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{-5}{12}\cdot\frac{-5}{12}=\frac{-3}{(3\cdot3-1)^2}+\frac{1}{3(3-2)^2}$	1M	
即 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{95}{144}$	1A	或 0.6597
	(6)	

解	分	備註
5. (a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{2x}$		
$y=\frac{1}{2}e^{2x}+C$	1A	
由於 $A(0,1)$ 在 S 上，我們有 $1=\frac{1}{2}e^{2(0)}+C$ 。	1M	
即 $C=\frac{1}{2}$		
因此 S 的方程爲 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$ 。	1A	
(b) 於點 $A(0,1)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{2(0)}=1$ 。		
因此 L 的方程爲 $y-1=1(x-0)$ 。	1M	
即 $y=x+1$	1A	
(c) S、L 及直線 $x=1$ 所圍成區域的面積		
$=\int_0^1\left[\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\right)-(x+1)\right]\mathrm{d}x$	1M	1M 給 $A=\int_0^1(y_1-y_2)\mathrm{d}x$
$=\left[\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right]_0^1$		
$=\frac{e^2-5}{4}$	1A	或 0.5973
	(7)	
6. (a) 設 X 爲一名學生的體重。樣本平均值 $\overline{X}\sim \mathrm{N}\left(67,\frac{15^2}{36}\right)$。		
$\mathrm{P}(\overline{X}>70)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{70-67}{\frac{15}{6}}\right)$	1M	
$=\mathrm{P}(Z>1.2)$		
≈ 0.1151	1A	
(b) 樣本比例爲 $\frac{9}{36}=0.25$ 。	1A	
喜歡吃炸薯條的學生所佔比例的近似 95% 置信區間		
$\approx\left(0.25-1.96\times\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{36}},0.25+1.96\times\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{36}}\right)$	1M	
$\approx(0.1085,0.3915)$	1A	
	(5)	
7. (a) $\frac{e^{-\lambda}}{0!}=0.1653$		
$\lambda=-\ln 0.1653$		
≈ 1.8	1A	
(b) P(一場球賽中入球數目 $<3)=\frac{e^{-1.8}}{0!}+\frac{e^{-1.8}(1.8)}{1!}+\frac{e^{-1.8}(1.8)^2}{2!}$	1M	
≈ 0.7306	1A	

解	分	備註
(c) 該球隊在兩場球賽中的入球數目 $\sim \mathrm{Po}(3.6)$。		
$\therefore$ P(在兩場球賽中的入球數目 <3)		
$=\frac{e^{-3.6}}{0!}+\frac{e^{-3.6}(3.6)}{1!}+\frac{e^{-3.6}(3.6)^2}{2!}$	1M	
另解 P(在兩場球賽中的入球數目 <3) $=\mathrm{P}(0,0)+\mathrm{P}(0,1)+\mathrm{P}(1,0)+\mathrm{P}(1,1)+\mathrm{P}(0,2)+\mathrm{P}(2\ ,0)$ $=\left(\frac{e^{-1.8}}{0!}\right)^2+2\left(\frac{e^{-1.8}}{0!}\right)\left[\frac{e^{-1.8}(1.8)}{1!}\right]+\left[\frac{e^{-1.8}(1.8)}{1!}\right]^2+2\left(\frac{e^{-1.8}}{0!}\right)\left[\frac{e^{-1.8}(1.8)^2}{2!}\right]$	1M	
≈ 0.3027	1A	
	(5)	
8. (a) $\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=13)=1$		
$0.1+a+0.25+0.15+b+0.05=1$	1M	
$a+b=0.45$ ---------- (1)		
$\mathrm{E}(X)=5.5$		
$1\times 0.1+3a+4\times 0.25+6\times 0.15+9b+13\times 0.05=5.5$	1M	
$a+3b=0.95$ ---------- (2)		
解 (1) 及 (2)，得 $a=0.2$ 和 $b=0.25$。	1A	給兩個答案
(b) (i) $\mathrm{P}(F\cap G)=0.25+0.15$		
$=0.4$	1A	
(ii) $\mathrm{P}(F)\times\mathrm{P}(G)=(0.25+0.15+0.25+0.05)(0.1+0.2+0.25+0.15)$		
$=0.49$	1A	
$\neq \mathrm{P}(F\cap G)$		
另解 1 $\mathrm{P}(F\mid G)=\frac{\mathrm{P}(F\cap G)}{\mathrm{P}(G)}$ $=\frac{0.4}{0.1+0.2+0.25+0.15}$ ≈ 0.571428571 $\mathrm{P}(F)=0.25+0.15+0.25+0.05$ $=0.7$ $\neq \mathrm{P}(F\mid G)$	1A	
另解 2 $\mathrm{P}(G\mid F)=\frac{\mathrm{P}(F\cap G)}{\mathrm{P}(F)}$ $=\frac{0.4}{0.25+0.15+0.25+0.05}$ ≈ 0.571428571 $\mathrm{P}(G)=0.1+0.2+0.25+0.15$ $=0.7$ $\neq \mathrm{P}(G\mid F)$	1A	
因此 F 和 G 不是獨立事件。	1	
	(6)	

解	分	備註
9. (a) 設 X 爲一名有溫習的學生的得分。		
$P(X \geq 43) = P\left(Z \geq \frac{43-59}{10}\right)$		
$= P(Z \geq -1.6)$		
≈ 0.9452	1A	任何一個
設 Y 爲一名沒有溫習的學生的得分。		
$P(Y \geq 43) = P\left(Z \geq \frac{43-35.2}{12}\right)$		
$= P(Z \geq 0.65)$		
≈ 0.2578	1A	
$\therefore$ P(測驗及格) $\approx 0.73 \times 0.9452 + 0.27 \times 0.2578$	1M	
$= 0.759602$	1A	或 0.7596
(b) P(一名學生在測驗前沒有溫習 $\mid$ 該名學生測驗及格)		
$= \frac{0.27 \times 0.2578}{0.759602}$	1M	
≈ 0.091634829		
≈ 0.0916	1A	
(c) P(在十名及格學生中有四人在測驗前沒有溫習)		
$\approx C_6^{10}(0.091634829)^4(1-0.091634829)^6$	1M	
≈ 0.0083	1A	
	(7)	
10. (a) (i) $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-t}{2}} \mathrm{d}t$		
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4-1}{6}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}e^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}}e^{\frac{-4}{2}} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1.5}}e^{\frac{-1.5}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2.5}}e^{\frac{-2.5}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3.5}}e^{\frac{-3.5}{2}}\right)\right]$	1M	
≈ 0.692913377		
≈ 0.6929	1A	
(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-t}{2}}\right) = \frac{-1}{2}t^{\frac{-3}{2}}e^{\frac{-t}{2}} + t^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{-1}{2}e^{\frac{-t}{2}}$	1M+1A	
$= \frac{-1}{2}e^{\frac{-t}{2}}\left(t^{\frac{-3}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right)$		
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(t^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-t}{2}}\right) = \frac{-1}{2}\left[e^{\frac{-t}{2}}\left(\frac{-3}{2}t^{\frac{-5}{2}} + \frac{-1}{2}t^{\frac{-3}{2}}\right) + \frac{-1}{2}e^{\frac{-t}{2}}\left(t^{\frac{-3}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right)\right]$	1M+1A	
$= \frac{1}{4}e^{\frac{-t}{2}}\left(3t^{\frac{-5}{2}} + 2t^{\frac{-3}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right)$		
> 0 其中 $1 \leq t \leq 4$。		
因此(i)中的估算值過高。	1	
	(7)	

解	分	備註
(b) 設 $t=x^2$。	1M	
$\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$ 當 $t=1$，$x=1$；當 $t=4$，$x=2$。	1A	
$I=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{-t}{2}}\mathrm{d}t$		
$=\int_1^2 \frac{1}{x}e^{\frac{-x^2}{2}}2x\mathrm{d}x$		
$=2\int_1^2 e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x$	1	
	(3)	
(c) $2\int_1^2 e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x<0.692913377$	1M	
$2\sqrt{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x<0.692913377$		
$2\sqrt{2\pi}(0.4772-0.3413)<0.692913377$	1A	給 0.4772 及 0.3413
$\pi<3.249593152$		
$\therefore\ \ \pi<3.25$	1	
	(3)	
11. (a) 當 $t=35$，輻射強度升至最大值，因此 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=0$。		
$\frac{a(30-35)+10}{(35-35)^2+b}=0$	1A	
$a=2$	1A	
	(2)	
(b) $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\frac{2(30-t)+10}{(t-35)^2+b}$		
設 $u=(t-35)^2+b$。	1M	
$\mathrm{d}u=2(t-35)\mathrm{d}t$		
$R=\int\frac{-2t+70}{(t-35)^2+b}\mathrm{d}t$		
$=\int\frac{-2t+70}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2(t-35)}$		
$=-\ln\lvert u\rvert+C$		
$=-\ln[(t-35)^2+b]+C$	1A	
$R\rvert_{t=T}=R\rvert_{t=0}$		
$-\ln[(T-35)^2+b]+C=-\ln[(0-35)^2+b]+C$	1M	
$(T-35)^2=35^2$		
$T=70$ 或 0（捨去）	1A	
	(4)	

解　分　備註

(c) $R\big|_{t=40} - R\big|_{t=41} = \ln\frac{61}{50}$

$-\ln[(40-35)^2+b]+C-\{-\ln[(41-35)^2+b]+C\} = \ln\frac{61}{50}$ 1M

$-\ln(25+b)+\ln(36+b) = \ln\frac{61}{50}$

$\ln\frac{36+b}{25+b} = \ln\frac{61}{50}$

$b = 25$ 1A

$\therefore\quad R = -\ln[(t-35)^2+25]+C$

$R\big|_{t=35} = 6$

$-\ln[(35-35)^2+25]+C = 6$ 1M

$C = 6+\ln 25$

即 $R = -\ln[(t-35)^2+25]+6+\ln 25$ 1A

(4)

(d) $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{2(30-t)+10}{(t-35)^2+25}$

$= \frac{70-2t}{t^2-70t+1250}$

$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(t^2-70t+1250)(-2)-(70-2t)(2t-70)}{(t^2-70t+1250)^2}$ 1M+1A

$= \frac{2t^2-140t+2400}{(t^2-70t+1250)^2}$

當輻射強度的變率達到最大值時，$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = 0$ 。

$2t^2-140t+2400 = 0$

$t = 30$ 或 40（捨去）

t	$0 \le t < 30$	$t = 30$	$30 < t \le 35$
$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}$	正	0	負

1M

因此，輻射強度的變率會在 $t = 30$ 時達到最大值。 1A

(4)

解	分	備註
12. (a) (i) 樣本平均值 $=\frac{56+\cdots+50}{16}$		
$=51.5625$	1A	
90% 置信區間		
$\approx\left(51.5625-1.645\times\frac{9}{\sqrt{16}},51.5625+1.645\times\frac{9}{\sqrt{16}}\right)$	1M+1A	
$=(47.86125,55.26375)$	1A	或 $(47.8613,55.2638)$
(ii) 設 n 爲樣本容量。		
$\therefore\ 2\left(1.645\cdot\frac{9}{\sqrt{n}}\right)<6$	1M	
$n>24.354225$	1A	
因此，最小樣本容量爲 25。	1A	
	(7)	
(b) (i) P(一名旅客輪候超過 65 分鐘)		
$=\mathrm{P}\left(Z>\frac{65-51.5}{9}\right)$	1M	
$=\mathrm{P}(Z>1.5)$		
≈ 0.0668	1A	
P(經理向他所會見的首 10 名旅客送出少於 2 張優惠券)		
$\approx(1-0.0668)^{10}+C_1^{10}(1-0.0668)^9(0.0668)$	1M	
≈ 0.8594	1A	
(ii) P(第 5 張優惠券是贈予經理會見的第 20 名旅客)		
$\approx C_4^{19}(1-0.0668)^{15}(0.0668)^4\cdot 0.0668$	1M	
≈ 0.0018	1A	
	(6)	

解	分	備註
13. (a) P(至少 2 名醉駕司機被捕)		
$=1-e^{-2.3}-e^{-2.3}(2.3)$	1A	
≈ 0.669145815		
≈ 0.6691	1A	
	(2)	
(b) P($\le$4 名醉駕司機被捕 $\mid$ 至少 2 名醉駕司機被捕)		
$\approx \dfrac{e^{-2.3}\left(\dfrac{2.3^2}{2!}+\dfrac{2.3^3}{3!}+\dfrac{2.3^4}{4!}\right)}{0.669145815}$	1M+1M	1M 給泊松分佈 1M 給條件概率
≈ 0.8748	1A	
	(3)	
(c) (i) P(第三晚爲首個有 ≥ 2 名醉駕司機被捕的晚上)		
$\approx (1-0.669145815)^2(0.669145815)$	1M	
≈ 0.0732	1A	
(ii) P(每晚均有 ≥ 2 名醉駕司機被捕並且合共有 10 名醉駕司機被捕)		
$=C_2^3\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^2}{2!}\right)^2\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^6}{6!}\right)+3!\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^2}{2!}\right)\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^3}{3!}\right)\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^5}{5!}\right)$	1M+1M	1M 給任何一個情況 1M 給所有情況
$+C_2^3\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^2}{2!}\right)\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^4}{4!}\right)^2+C_2^3\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^3}{3!}\right)^2\left(e^{-2.3}\dfrac{2.3^4}{4!}\right)$		
≈ 0.0471	1A	
	(5)	