考生表現

單元二

甲部

題號	一般表現
1.	令人滿意。大部分考生從基本原理求導數時懂得基礎公式，並且運用「和化積公式」處理三角數式，但很多考生卻因沒有明確顯示 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ 而失分。
2.	優良。然而，部分考生因沒有顯示求出 n 和 a 的步驟而失分。少數考生沒有正確地表示 $C_2^n=\frac{n(n-1)}{2}$ 。
3.	優良。 部分考生把命題轉化為 $\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{4n+1}{3n+1}-1$ ，然後作出正確的證明。 一些普遍的錯誤包括： ■ 對 $n=1$， L.H.S. $=\frac{1}{1\times 4}=\frac{1}{4}$ 及 R.H.S. $=\frac{4(1)+1}{3(1)+1}=\frac{5}{4}$ ；或 L.H.S.= 1 及 R.H.S. $=\frac{4(1)+1}{3(1)+1}=\frac{5}{4}$ 然後指出命題是不正確的。 ■ 在第二個步驟，「假設對<u>所有</u>正整數而言，陳述是真實的」。 ■ 在因式分解數式分子時略過了必要的步驟 $\cdots=\frac{12k^2+19k+5}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{(3k+1)(4k+5)}{(3k+1)(3k+4)}=\cdots$ ■ 在完成第一／第二個步驟之後，沒有說明「陳述對 $n=1$ 而言是對的」及／或「陳述對 $n=k+1$ 而言亦是對的」。
4. (a)	優良。然而，部分考生在答案中遺漏了不定積分的任意常數，因而未能藉着代入 $(1, e)$ 點求得這任意常數的值。
(b)	令人滿意。部分考生未能正確地求得 y 軸截距。很多考生在求於該點的斜率時，卻錯誤地計算 $e^0-1=-1$。部分考生在求得曲線於 $(0, 2)$ 切 y 軸時，便隨即說明切線的方程是 $y=2$，但沒有說明理由。
5. (a)	優良。然而，部分考生沒有察覺可從表中直接找到答案，因而花時間求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$。少數考生錯誤混淆了「極大點」、「極小點」 和「拐點」等術語。
(b)	良好。然而，部分考生混淆了「水平」與「垂直」，並寫出「 $y=-3$ 是垂直漸近線」。部分考生在得出正確數式 $f(x)=-3+\frac{12}{x^2+3}$ 後，卻錯誤地說出「 $x=-\sqrt{3}$ 和 $x=\sqrt{3}$ 是垂直漸近線」、「 $x=\pm\sqrt{3}i$ 是垂直漸近線」等等。
(c)	令人滿意。雖然在每個拐點的一階導數都如已知的表所顯示為非零，但不少考生錯誤地把兩個拐點繪畫為平穩點。少數考生在圖像中遺漏了所有標示。

6.	(a)	優良。大部分考生在求得多項式的被積函數方面具備基本技巧，並且以積分法求出面積。考生普遍的錯誤是 面積 $=\int_0^4\left[\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4\right)-4\right]\mathrm{d}x+\int_4^5\left[5-\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4\right)\right]\mathrm{d}x$。
	(b)	尚可。百分之四十考生在這部分取得零分，頗多考生錯誤以外殼法求體積。很多考生運用 $\pi\int_0^4\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4-4\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_4^5\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4-4\right)^2\mathrm{d}x$ 而不是簡單直接的方法 $\pi\int_0^5\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4-4\right)^2\mathrm{d}x$ 求體積。
7.	(a)	優異。超過百分之九十考生取得滿分，但在這些考生中，頗多考生沒有運用直接步驟作出證明。舉例說，部分考生沒有直接變換 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，而是寫出 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$，然後運用 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 來簡化分母。
	(b)	尚可。很多考生沒有適當運用(a)的恆等式，並且犯了以下的錯誤： $\frac{\sin 8y}{1+\cos 8y}\cdot\frac{\cos 4y}{1+\cos 4y}\cdot\frac{\cos 2y}{1+\cos 2y}=\tan 4y\cdot\tan 2y\cdot\tan y$ 或 $\frac{\sin 8y}{1+\cos 8y}=\tan y$。部分考生沒有留意他們在證明時必須運用在(a)得出的結果，因而未能取得滿分。
8.	(a)	良好。約有半數考生能正確地求得逆矩陣。部分考生在求 M 的逆矩陣時，運用了餘因子矩陣，而不是伴隨矩陣。 部分考生遺漏了所有負號，而使用了 $\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\k&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\k&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}k&0\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\k&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&k\\k&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}k&0\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&k\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ 作為餘因子矩陣。部分考生混淆了矩陣與行列式的記號，然後寫出答案 $M^{-1}=\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix}0&0&k\\k&0&-1\\-k&k^2&1\end{vmatrix}$。
	(b)	令人滿意。部分考生利用了一些與(a)部分無關的方法。 一些普遍的錯誤包括： ■ 忽略了矩陣乘法的非交換性質，然後得出： $\begin{pmatrix}x\\1\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&k\\k&0&-1\\-k&k^2&1\end{pmatrix}$。 ■ 混淆了 M 與 M^{-1}，並且表述 $\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}0&0&k\\k&0&-1\\-k&k^2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$。

9.	(a)	令人滿意。大部分考生利用高斯消去法或考慮係數矩陣的行列式來開始作業。在利用高斯消去法的考生之中，部分考生得出 $(ab-b)z=a+2$，但未能推論 $ab-b$ 和 $a+2$ 兩者均為零。在考慮係數矩陣的行列式的考生之中，部分只設 $\Delta=0$，但沒有留意 $\Delta_z=0$。
	(b)	尚可。在(a)部分取得滿分的考生中，大多數在這部分都取得滿分。
10.	(a)	優良。少數考生因為錯誤背記截點公式而失分。
	(b)	欠佳。部分考生在邏輯推理方面出錯。他們以為若 A、N、P、M 是共圓點時，AP 一定是直徑，因而指出 $\angle ANP=\angle AMP=90°$。另一個常見的錯誤是點積公式中錯誤的向量方向，例如 $\cos\angle OAB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$。
11.	(a)	優良。超過四分之三考生取得滿分。
	(b) (i)	良好。部分考生運用了錯誤的代入法 $u=\tan\theta$，因而失分。
	(ii)	欠佳。半數考生在這部分取不到得分。很多考生沒有改變積分的上、下限。部分考生在得出已知的答案時忽略了有理化，因而失分。另一個普遍的錯誤是 $\sqrt{x^4+4x^2+3}=\sqrt{(x+2)^2-1}$。
	(c)	欠佳。部分考生未能得出正確數式 $\cos^2\phi=\frac{1}{1+t^2}$。很多考生在簡化帶有根號的數式時感到困難。另一個普遍的錯誤是 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+2\cos^2\phi}}\mathrm{d}\phi=\int_0^1\frac{t}{1+\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$。
12.	(a) (i)	良好。少數考生錯誤地把從 P 至 Q 所需的時間表為 $7x$ 或 $\frac{7}{x}$，而不是正確數式 $\frac{x}{7}$。
	(ii)	欠佳。約有半數考生在求出極小值時懂得運算步驟。部分考生在第一部分得出正確證明之後，寫出 x 的小數值，但這些值不能確保可求得題目給定的 QB 的真確值。此外，少數考生錯誤地捨去 $x=40-\frac{5\sqrt{6}}{2}$。
	(b) (i)	差劣。只有大約三分之一考生在這部分取得分數。在這些考生之中，大部分都能成功求出 $\sin\beta$ 及／或 $\cos\beta$。很多考生沒有就相應的三角形運用正弦公式。此外，少數考生錯誤地把 ΔAMB 當作為直角三角形。
	(ii)	差劣。只有大約四分之一考生在這部分取得得分。在這些考生之中，大部分都懂得求(b)(i)數式相對於時間的導數的步驟。另外，考生普遍的錯誤是未能察覺 $\frac{\mathrm{d}MB}{\mathrm{d}t}$ 是負值的，因而錯誤地寫出正值為最終答案。

13.	(a) (i)	令人滿意。部分考生混淆了跡與轉置。部分考生正確地計算 MN 和 NM，但沒有求 $\mathrm{tr}(MN)$ 和 $\mathrm{tr}(NM)$。其他錯誤包括 $\mathrm{tr}(MN)=(a+d)\mathrm{tr}\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}$ 和 $\mathrm{tr}(MN)=\mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(N)$。
	(ii)	差劣。很多考生作出如 $\mathrm{tr}(BAB^{-1})=\mathrm{tr}(BB^{-1}A)$ 般的錯誤。部分考生錯誤地利用(a)(i)來指出 $A=AB^{-1}B=BAB^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$。雖然部分考生可以使用這不正確的結果來推算出答案，但不能獲得準確分。
	(iii)	差劣。很多考生在(a)(ii)錯誤指出 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$，沒有列出步驟便寫下答案。部分考生寫出 $\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}=4$。部分考生指出 $\lvert A\rvert=\mathrm{tr}(A)$。部分考生只背記以往試卷的解法，然後寫出如 $(BAB^{-1})^n=BA^nB^{-1}$ 等的東西，並用來推論 $\lvert A\rvert=3$。頗多考生累贅地展開 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 來解答(a)(ii)和(iii)部分。部分考生最後都得出正確答案。
	(b) (i)	差劣。很多考生錯誤地從 $\begin{pmatrix}p-\lambda_1&q\\r&s-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 推論出 $\begin{pmatrix}p-\lambda_1&q\\r&s-\lambda_1\end{pmatrix}=0$，因而 $p=s=\lambda_1$ 及 $q=r=0$。部分考生寫出錯誤的東西，例如 $\begin{vmatrix}p-\lambda_1&q\\r&s-\lambda_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}=0$ 和 $\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^{-1}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^{-1}$。
	(ii)	差劣。很多考生未能證明有關的結果，因為在之前的部分出錯，例如利用 $\lambda_1=\lambda_2$ 或 $p=s=\lambda_1$、$q=r=0$ 等等。部分考生嘗試考慮根的和與積來證明結果，但大部分考生都不能完成論證。
	(c)	差劣。超過百分之九十考生在這部分取不到分數。有些在較前部分犯了錯誤的考生宣稱 $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，然後推論 $\lambda=1$ 或 3。
14.	(a) (i)	令人滿意。部分考生在推算 $(\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{b})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{p}$ 時沒有提及 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，因而失分。
	(ii)	欠佳。很多考生未能把在(a)(i)部分得出的結果接上 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$。部分考生考慮 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=(\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{b})+(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{c})+(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{a})$ 並重複他們在(a)(i)部分的計算。
	(iii)	差劣。頗多考生作出下列錯誤的論證: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=2\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}$ $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}$ $\mathbf{p}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{d})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}$ $\mathbf{p}-\mathbf{d}=\mathbf{d}$ $\therefore \lvert\mathbf{p}-\mathbf{d}\rvert=\lvert\mathbf{d}\rvert$ 大部分考生在最後一部分的解釋中，不明白固定半徑的意思，也未能察覺 $\lvert\overrightarrow{DP}\rvert=$ D 與 P 之間的距離。

(b)	(i)	差劣。由於大部分考生在較前部分未能充分理解幾何意義，因此他們未能運用 $PD=OD$ 來作出結論。
	(ii)	差劣。很少考生嘗試作答這部分。在這些考生中，大部分均未能運用叉積的幾何意義或平面的法線向量的概念。

一般評論及建議

1. 考生應小心閱讀試題答題簿封面的所有指示。他們應列出得出答案的必要步驟，例如在第1題清楚顯示 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$；在第3題的二次多項式分解；在第11題的代數式有理化以及簡化複雜數式等等，否則或會被扣分。

2. 考生應適當分配時間，盡力回答所有題目。

3. 考生在嘗試答題前應小心閱讀並理解題目。例如在第5題，由於已知的符號表提供了足夠的資料以確定(a)部分題目要求的點的 x 值，因此即使有關的函數已被明確列出，考生卻無需求函數的導數。至於很多題目要求考生使用較前部分得出的結果，考生應掌握相關數式之間的連繫，然後寫出適當的步驟，否則，對於一些不容許另一種方法的題目而言，考生會被扣分。

4. 考生理應熟識求出漸近線的方法，以及題目要求的表達。

5. 在微積分方面，考生對基本概念、公式和作業等應有良好的掌握，例如
   - 明白負的變率顯示相對於時間的數量減少；
   - 於不定積分的答案加入任意常數；
   - 在 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$ 中不要遺漏絕對值符號；
   - 在求出旋轉體體積的公式內不要遺漏 π；
   - 在使用代換的定積分變換上、下限。

6. 在向量方面，考生應
   - 寫出適當的符號，例如向量符號、純量和向量的乘法符號；
   - 留意 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ 並不蘊涵 $\mathbf{b}=\mathbf{c}$；
   - 必須顯示兩個向量互相垂直，才可使它們的點積等於零；
   - 明白向量式的幾何解釋，尤其是關於叉積的幾何解釋。

7. 在矩陣方面，考生應留意矩陣乘法是不交換的。他們在矩陣的基本運算方面應更為小心，因為這些小錯誤可能不會在隨後的步驟中反映出來。

8. 在方程組方面，考生理應熟悉解的不同條件與對應係數矩陣或增廣矩陣的相關性質。

9. 考生應知道，除非題目另有註明，否則題目要求他們求得的數值，即使在中間的步驟，都必須為真確值。如果考生以推測或從計數機的數值以四捨五入得出最終答案，或會被扣分。