

香港考試及評核局  
香港中學文憑考試

**數學**  
**延伸部分**  
**單元一（微積分與統計）**  
**（樣本試卷）**

考試時間：兩小時三十分鐘  
本試卷必須用中文作答

**考生須知**

1. 本試卷分甲、乙兩部。每部各佔 50 分。
2. 本試卷各題**均須作答**。
3. 所有算式，須詳細列出。
4. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或用 4 位小數表示。

考試結束前不可  
將試卷攜離試場

甲部 (50分)

1. 依  $x$  的升冪次序展開下列數式到含  $x^2$  的項為止：

(a)  $e^{-2x}$  ,

(b)  $\frac{(1+2x)^6}{e^{2x}}$  。

(4分)

2. 為一個熱氣球灌氣時，其半徑  $r$  (以米為單位) 會隨時間  $t$  (以小時為單位) 增加，兩者關係是  $r = 3 - \frac{2}{2+t}$ ，其中  $t \geq 0$ 。得知熱氣球的體積  $V$  (以立方米為單位) 為

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3。$$

當熱氣球的半徑是 2.5 m 時，以  $\pi$  表熱氣球體積的變率。

(4分)

3. 某政黨就市民對某項政府政策的看法進行民意調查，隨機訪問了 150 名人士，當中有 57 人支持該項政策。

(a) 估算支持該項政策的總體比例。

(b) 求該總體比例的 90% 置信區間估計。

(4分)

4. 某大學的一年級學生有 90% 是本地生，當中 5% 入學時持有獎學金。至於非本地生的一年級學生，則有 35% 入學時**並非**持有獎學金。

(a) 若隨機揀選一名一年級學生，求該學生入學時持有獎學金的概率。

(b) 已知揀選了一名入學時持有獎學金的一年級學生，求該學生是非本地生的概率。

(4分)

5. 某製造商生產了一大批電燈泡，其平均壽命為 640 小時，標準差為 40 小時。現從這批電燈泡中隨機抽出一個由 25 個電燈泡組成的樣本。求該 25 個電燈泡的樣本平均壽命大於 630 小時的概率。

(5分)

6. 設  $u = \sqrt{\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}}$ ，其中  $x > -1$ 。

(a) 使用對數微分法，以  $u$  及  $x$  表  $\frac{du}{dx}$ 。

(b) 假設  $u = 3^y$ ，以  $x$  表  $\frac{dy}{dx}$ 。

(5分)

7. 隨機變量  $X$  於  $x=1$ 、 $2$  和  $3$  時的概率分佈  $P(X=x)$  如下表所示。

$x$	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.6	0.3

計算

(a)  $E(X)$ ，

(b)  $\text{Var}(3-2X)$ 。

(5分)

8. 某高速公路每月發生的交通意外數目依循一個平均值為  $1.7$  的泊松分佈，假設這條高速公路每月發生的交通意外數目是獨立的。

(a) 求某年首季在這條高速公路發生至少四宗交通意外的概率。

(b) 求某年只有一季發生至少四宗交通意外的概率。

(6分)

9.  $L$  為曲線  $C: y = x^3 + 7$  於  $x=2$  的切線。

(a) 求切線  $L$  的方程。

(b) 利用 (a) 的結果，求  $y$  軸、切線  $L$  及曲線  $C$  所圍成的面積。

(7分)

10. 水池內受某疾病感染的魚之數目  $N$  可用

$$N = \frac{500}{1 + ae^{-kt}}$$

模擬，其中  $a$ 、 $k$  為正常數， $t$  為自爆發疾病起計的日數。

當  $t = 5$ 、 $10$ 、 $15$ 、 $20$  時， $N$  的值如下表所示：

$t$	5	10	15	20
$N$	13	34	83	175

- (a) 將  $\ln\left(\frac{500}{N} - 1\right)$  表為  $t$  的線性函數。
- (b) 利用第 10 頁的方格紙，用圖解法估計  $a$  及  $k$  的值（答案須準確至一位小數）。
- (c) 疾病爆發多少日後，受感染的魚之數目會達 270 條？

(6分)

乙部 (50分)

11. 某主題公園的經理思昕展開宣傳計畫，以增加公園的**每日入場人次**。公園**每日入場人次**的變率可用下式模擬：

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k(25-t)}{e^{0.04t} + 4t} \quad (t \geq 0),$$

其中  $N$  為每日結束時所錄得的**每日入場人次** (以百次為單位)， $t$  是由該計畫開始起計的日數及  $k$  為正常數。

思昕發現該計畫開始時， $N = 10$  及  $\frac{dN}{dt} = 50$ 。

- (a) (i) 設  $v = 1 + 4te^{-0.04t}$ ，求  $\frac{dv}{dt}$ 。  
(ii) 求  $k$  的值，並由此以  $t$  表  $N$ 。  
(7分)
- (b) (i) **每日入場人次**何時會達到最大值？  
(ii) 思昕聲稱在該計畫開始起計的某一日，公園的入場人次會超過 50 百次。你是否同意？試解釋你的答案。  
(3分)
- (c) 思昕的上司認為一段長時間後，公園的**每日入場人次**會回復至計畫開始時的原來人次。你是否同意？試解釋你的答案。(提示： $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-0.04t} = 0$ 。)  
(2分)

12. (a) 設  $f(t)$  為定義於  $t \geq 0$  的函數。已知

$$f'(t) = e^{2bt} + ae^{bt} + 8,$$

其中  $a$  及  $b$  為負常數， $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 3$  及  $f'(1) = 4.73$ 。

- (i) 求  $a$  及  $b$  的值。  
 (ii) 取  $b = -0.5$ 。求  $f(12)$ 。

(5分)

(b) 設  $g(t)$  為定義於  $t \geq 0$  的另一函數。已知

$$g'(t) = \frac{33}{10}te^{-kt},$$

其中  $k$  為正常數。圖 1 所示為  $g'(t)$  對  $t$  的圖像。已知  $g'(t)$  於  $t = 7.5$  時達至最大值和  $g(0) = 0$ 。

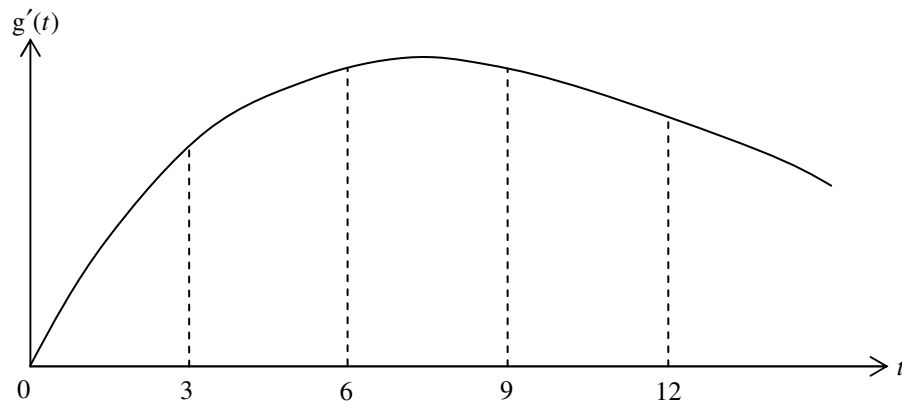


圖 1

- (i) 求  $k$  的值。  
 (ii) 利用有四個子區間的梯形法則估算  $g(12)$ 。

(6分)

(c) 根據從 (b)(ii) 所得的估計值及圖 1，思晴聲稱  $g(12) > f(12)$ 。你是否同意？試解釋你的答案。

(2分)

13. 一緊急熱線中心有 80 名接線生。假設接線生接聽的電話數目是獨立的，而每名接線生在每十分鐘時段 (TMTI) 接聽的電話數目依循一平均值為 6.2 的泊松分佈。若某接線生在某 TMTI 內接聽的電話數目少於三個，該接線生便可稱為空閒。

(a) 求某接線生在某 TMTI 內處於空閒狀態的概率。

(3分)

(b) 求某 TMTI 內有最多兩名空閒接線生的概率。

(3分)

(c) 經理智朗逐一檢查每名接線生在某 TMTI 內接聽的電話數目。至少需檢查多少名接線生，使找出一名空閒接線生的概率大於 0.9？

(4分)

14. 假設某城市 12 歲兒童的體重指數 (BMI) 值 (以  $\text{kg}/\text{m}^2$  為單位) 依循正態分佈, 其平均值為  $\mu \text{ kg}/\text{m}^2$ , 標準差為  $4.5 \text{ kg}/\text{m}^2$ 。

(a) 隨機抽選九名 12 歲兒童, 他們的 BMI 值 (以  $\text{kg}/\text{m}^2$  為單位) 記錄如下:

16.0、18.3、15.2、17.8、19.5、15.9、18.6、22.5、23.6

(i) 求  $\mu$  的無偏估計值。

(ii) 設立  $\mu$  的 95% 置信區間。

(3分)

(b) 假設  $\mu=18.7$ , 若隨機抽選 25 名 12 歲兒童並記錄他們的 BMI 值, 求樣本平均值少於  $17.8 \text{ kg}/\text{m}^2$  的概率。

(4分)

(c) 一名 12 歲兒童的 BMI 值若超過  $25 \text{ kg}/\text{m}^2$ , 便稱為*超重*。現隨機逐一抽選 12 歲的兒童, 並記錄他們的 BMI 值, 直至找到兩名*超重*兒童為止。假設  $\mu = 18.7$ ,

(i) 求一名被抽選的兒童*超重*的概率。

(ii) 在這個抽取樣本過程中, 求需抽選超過八名兒童的概率。

(iii) 已知這個抽取樣本的過程需抽選超過八名兒童, 求恰好抽選十名兒童的概率。

(8分)

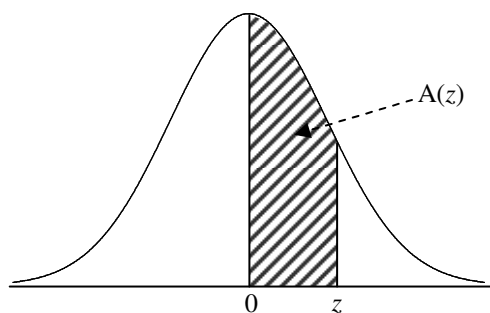
**試卷完**



### 標準正態曲線下的面積

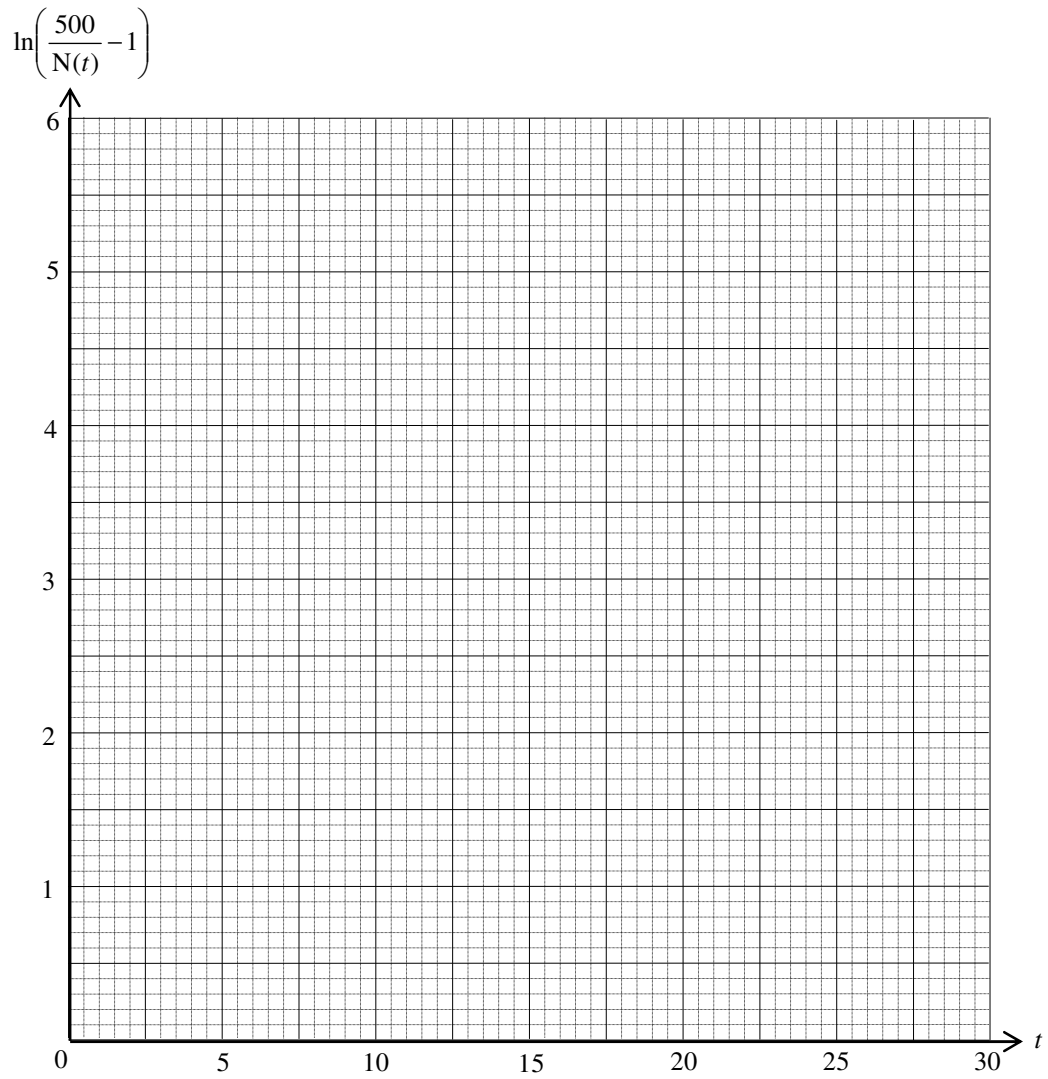
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字，為曲線下由  $z=0$  至正值  $z$  之間的面積所佔的比例。  
負值  $z$  所含的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

10. (續)



香港考試及評核局  
香港中學文憑考試

**數學**  
**延伸部分**  
**單元二（代數與微積分）**  
**（樣本試卷）**

考試時間：兩小時三十分鐘  
本試卷必須用中文作答

**考生須知**

1. 本試卷分甲、乙兩部。每部各佔 50 分。
2. 本試卷各題**均須作答**。
3. 所有算式，須詳細列出。
4. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

考試結束前不可  
將試卷攜離試場

## 參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

\*\*\*\*\*

### 甲部 (50 分)

1. 從基本原理求  $\frac{d}{dx}(\sqrt{2x})$ 。  
(4 分)
  
2. 有一球狀雪塊正在溶解，其體積以  $4 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  的恒速不斷減少。當球狀雪塊的半徑為  $5 \text{ cm}$  時，求該半徑的變率。  
(4 分)
  
3. 曲線於任意點  $(x, y)$  的斜率為  $\frac{dy}{dx} = 2x \ln(x^2 + 1)$ 。已知該曲線通過點  $(0, 1)$ 。  
求該曲線的方程。  
(4 分)
  
4. 求  $\int \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^4 dx$ 。  
(4 分)
  
5. 藉考慮  $\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}$ ，求  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}$  的值。  
(4 分)
  
6. 設  $C$  為曲線  $3e^{x-y} = x^2 + y^2 + 1$ 。  
求  $C$  於點  $(1, 1)$  的切線方程。  
(5 分)

7. 解以下線性方程組

$$\begin{cases} x+7y-6z=-4 \\ 3x-4y+7z=13 \\ 4x+3y+z=9 \end{cases}.$$

(5分)

8. (a) 利用分部積分法，求  $\int x \cos x \, dx$ 。

(b)

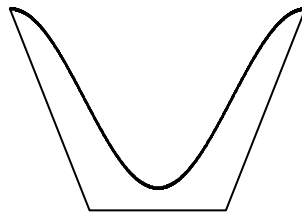


圖 1

某容器的內表面是把曲線  $y = -\cos x$  (其中  $0 \leq x \leq \pi$ ) 繞着  $y$  軸旋轉所成 (見圖 1)。求該容器的容量。

(6分)

9.

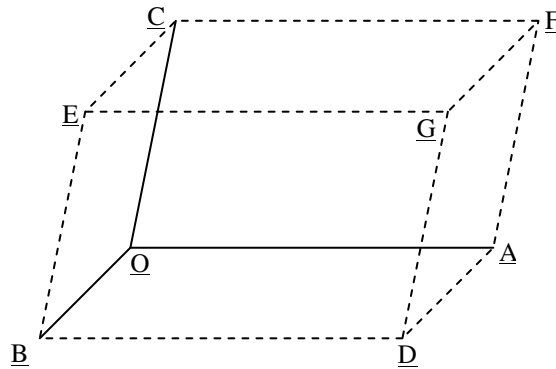


圖 2

設  $\overrightarrow{OA} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ， $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  及  $\overrightarrow{OC} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 。圖 2 顯示由向量  $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$  及  $\overrightarrow{OC}$  形成的平行六面體  $OADBECFG$ 。

(a) 求平行四邊形  $OADB$  的面積。

(b) 求平行六面體  $OADBECFG$  的體積。

(c) 若  $C'$  為與  $C$  不同的另一點，使得由  $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$  及  $\overrightarrow{OC}'$  形成的平行六面體體積與  $OADBECFG$  相同，求  $\overrightarrow{OC}'$  的一個可能的向量。

(6分)

10. 設  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ，當中  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 。

(a) 以數學歸納法，證明對任意正整數  $n$ ，

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}。$$

(b) 解  $\sin 3\theta + \sin 2\theta + \sin \theta = 0$ 。

(c) 已知  $A^3 + A^2 + A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 。

計算  $a$  的值。

(8 分)

**乙部 (50 分)**

11. 設  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  及  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 。

(a) 設  $I$  及  $O$  分別為  $3 \times 3$  單位矩陣及零矩陣。

(i) 證明  $P^3 - 2P^2 - P + I = O$ 。

(ii) 利用 (i) 的結果，或用其他方法，求  $P^{-1}$ 。

(5 分)

(b) (i) 證明  $D = P^{-1}AP$ 。

(ii) 證明  $D$  及  $A$  為非奇異。

(iii) 求  $(D^{-1})^{100}$ 。

由此，或用其他方法，求  $(A^{-1})^{100}$ 。

(7 分)

12. 設  $f(x) = \frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} - 1$ ，當中  $x \neq \pm 1$ 。

(a) (i) 求  $y = f(x)$  的圖像的  $x$  軸及  $y$  軸截距。

(ii) 求  $f'(x)$ ，並證明

$$f''(x) = \frac{16(3x^2 + 1)}{(x-1)^3(x+1)^3},$$

其中  $x \neq \pm 1$ 。

(iii) 求  $y = f(x)$  的圖像中所有極值點，並證明圖像中沒有拐點。

(6 分)

(b) 求  $y = f(x)$  的圖像的所有漸近線。

(2 分)

(c) 描繪  $y = f(x)$  的圖像。

(3 分)

(d) 設  $S$  為  $y = f(x)$  的圖像、線  $x = 3$ 、線  $x = a$  ( $a > 3$ ) 及線  $y = -1$  所圍成的面積。

求  $S$ ，答案以  $a$  表示。

推證  $S < 4 \ln 2$ 。

(3 分)

13. (a) 設  $a > 0$ ，而  $f(x)$  為一連續函數。

證明  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ 。

由此證明  $\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^a [f(x) + f(a-x)] dx$ 。

(3分)

(b) 證明  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ 。

(5分)

(c) 利用(a)及(b)，或用其他方法，計算  $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x + 1)(e^{2x-1} + 1)}$ 。

(6分)

14.

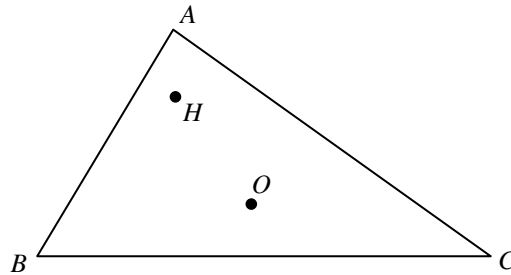


圖 3

在圖 3 中， $\triangle ABC$  為一個銳角三角形，而  $O$  及  $H$  分別為其外心及垂心。設  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ， $\vec{OB} = \mathbf{b}$ ， $\vec{OC} = \mathbf{c}$  及  $\vec{OH} = \mathbf{h}$ 。

(a) 證明  $(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \parallel (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 。

(3分)

(b) 設  $\mathbf{h} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ，其中  $t$  為一非零常數。  
證明

(i)  $t(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a} - \mathbf{b} = s(\mathbf{c} + \mathbf{a})$ ，其中  $s$  為一純量，

(ii)  $(t-1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$ 。

(5分)

(c) 以  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  及  $\mathbf{c}$  表  $\mathbf{h}$ 。

(2分)

試卷完