

---

**數學**  
**延伸部分 單元一**  
**微積分與統計**  
**練習卷**

**2012 年 2 月**



# 內容簡介

---

- 考試形式
- 題目介紹
- 評卷參考
- 學生表現
- 答卷示例
- 一般建議



# 考試形式

---

- 考試時間：2小時30分鐘
- 本單元只考一卷
- 本卷分爲兩部，全部題目均須作答
- 學生須具有必修部分及初中課程基礎部分與非基礎部分的知識



# 題目介紹 – 題 1

---

- (a) 展開  $(2x+1)^3$ 。
- (b) 依  $x$  的升冪次序展開  $e^{-ax}$  到含  $x^2$  的項為止，其中  $a$  為常數。
- (c) 若在  $(2x+1)^3 / e^{ax}$  的展式中， $x^2$  項的係數是  $-4$ ，求  $a$  的值。
- 基礎知識領域內容
  - 二項展式中指數僅涉及正整數



## 題目介紹 – 題 4

---

考慮曲線  $C : y = x(2x - 1)^{1/2}$ ，其中  $x > 1/2$ 。

(a) 求  $dy/dx$ 。

(b) 利用(a)，求與曲線  $C$  相切並與直線  $2x - y = 0$  平行的兩條切線的方程。

- 求導法的應用



## 題目介紹－題 6

---

現從一個平均值為  $\mu$ 、方差為 8 的正態總體中隨機抽取一個容量為 10 的樣本。設樣本的平均值為  $\bar{X}$ 。

(a) 計算  $\text{Var}(2\bar{X}+7)$ 。

(b) 設樣本的平均值為 50，求  $\mu$  的 97% 置信區間。

- 置信區間及方差為新課題



## 題目介紹 – 題 7

在某遊戲中，有  $A$  及  $B$  兩個袋，各有 5 個球，其中  $A$  袋有 3 個紅球和 2 個藍球，而  $B$  袋則有 4 個紅球和 1 個藍球。參加者首先隨機抽選一個袋，並從袋中隨機抽出一個球。如果抽出來的球為藍色，該名參加者便會獲獎。接着便會把抽出來的球放回袋中，讓下一位參加者參與遊戲。

(a) 求某名參加者在一次遊戲中獲獎的概率。



## 題目介紹 – 題 7

---

- (b) 現有兩名參加者參與遊戲。已知他們之中至少有一人獲獎，求兩人皆獲獎的概率。
- (c) 若有 60 名參加者獲獎，求他們當中曾從 A 袋中抽出藍球的人數的期望值。

- 期望值為初中基礎課題





# 題目介紹 – 題 10

某工程師用以下方程分別模擬兩台新機器  $A$  及  $B$  在首 10 個星期中生產某合金的速率：

$$\frac{dx}{dt} = 61t/(t+1)^{5/2} \text{ 和}$$

$$\frac{dy}{dt} = 15 \ln(t^2 + 100)/16, \text{ 其中 } 0 \leq t \leq 10,$$

而其中  $x$ （以百萬千克為單位）及  $y$ （以百萬千克為單位）分別為機器  $A$  及  $B$  生產合金的數量， $t$ （以星期為單位）為從生產開始起計的時間。

(a) 利用代換  $u = t + 1$ ，求機器  $A$  在首 10 個星期中所生產合金的數量。



# 題目介紹 – 題 10

---

- (b) 利用有 5 個子區間的梯形法則，估算機器  $B$  在首 10 個星期中所生產合金的數量。
- (c) 根據(a)及(b)的結果，該名工程師聲稱在首 10 個星期中，機器  $B$  的生產力較機器  $A$  高。你是否同意？試解釋你的答案。
- 代換積分法及梯形法則為舊課題
  - 學生需用文字、數學語言及符號解釋他們的答案



# 題目介紹 – 題 12

某學校職員研究學校醫療室的使用情況。下表記錄在 100 個隨機抽選的上課日中，每一天使用醫療室的次數：

每天使用次數	0	1	2	3	4	5	6	7
頻數	6	12	18	21	20	12	7	4

(a) 求醫療室每天平均使用次數的無偏估計值。

- 無偏估計值為舊課題



# 題目介紹 – 題 12

---

- (b) (i) 求醫療室使用少於 4 次的上課日的樣本比例。
  - (ii) 求醫療室使用少於 4 次的上課日所佔比例的近似 95% 置信區間。
- 
- 總體比例的置信區間為新課題



# 評卷參考 – 題 4

---

**1M** : 給積法則

**1A** : 給正確微分

**1M** : 給切線斜率與直線  $2x - y = 0$  的斜率相等

**1A** : 給所有正確的  $x$  值

**1A** : 給一個正確切線的方程

**1A** : 給另一個正確切線的方程



# 評卷參考 – 題 6

---

**1M** : 給  $\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(X)/n$

**1A** : 給正確答案

**1M** : 給  $50 \pm d$

**1A** : 給 2.17

**1A** : 給正確的置信區間



# 評卷參考 – 題 10(a)

---

- 1A : 給用正確定積分計算所述時段所生產的合金數量
- 1M : 給被積函數寫成  $x^n$  的形式
- 1A : 給正確的原函數
- 1A : 給正確的答案

## 另解

- 1A : 給代換後正確的不定積分
- 1M : 給被積函數寫成  $x^n$  的形式
- 1A : 給以  $t$  表正確的不定積分
- 1A : 給正確答案



# 評卷參考 – 題 10(b)及(c)

---

(b) 1M : 給梯形法則

1A : 給正確答案

(c) 1A : 給  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right)$  的正確答案

1A : 給  $\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{dy}{dt} \right)$  的正確答案

1A : 給正確得出 **45.6792** 是一個高估值

1A : 給正確推論





## 學生表現 – 題 2

---

- 整體表現甚佳
- 在**(a)**，少數學生誤以為  $\frac{dt}{dy} = \frac{dy}{dt}$
- 在**(c)**，少數學生未能正確應用鏈式法則



## 學生表現 – 題 6

---

- 在 **(a)**，部分學生誤以為

$$\text{Var}(2\bar{X} + 7) = 2\text{Var}(\bar{X}) \quad \text{及}$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(X)$$

- 在 **(b)**，部分學生誤以為置信區間是

$$\left( 50 - 2.17 \times \frac{8}{10}, 50 + 2.17 \times \frac{8}{10} \right)$$



## 學生表現 – 題 9

---

- 在 (a) ，部分學生忽略了

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

及誤以為

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- 在 (b) ，少數學生不懂如何利用  
 $A$  與  $B$  為獨立事件這個條件



## 學生表現 – 題 12

---

- 在 **(a)**，少數學生誤以為估算值是  $\frac{321}{99}$
- 在 **(b)**，部分學生未能運用總體比例的置信區間公式



# 答卷示例 - 表現良好

## 題10

$$\begin{aligned}
 10(a) \text{ Amount by A} &= \int_0^{10} \frac{6t}{(t+1)^2} dt \quad \checkmark && \text{IA} \\
 &= \int_1^{11} \frac{6(u-1)}{u^2} du \quad (\because u=t+1) \\
 &= \int_1^{11} 6\left[u^{-2} - u^{-1}\right] du \quad \checkmark && \text{IM} \\
 &= 6\left[\frac{u^{-1}}{-1} + \frac{u^{-2}}{2}\right]_1^{11} \quad \checkmark && \text{IA} \\
 &= 45.6636 \quad \checkmark && \text{IA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \text{ Amount by B} &= \int_0^{10} \frac{15}{16} \ln(t^2+100) dt \\
 &\approx \frac{2}{2} \times \frac{15}{16} \left[ \ln(0^2+100) + 2\ln(2^2+100) + 2\ln(4^2+100) \right. \\
 &\quad \left. + 2\ln(6^2+100) + 2\ln(8^2+100) + \ln(10^2+100) \right] \quad \text{IM} \\
 &= 45.6792 \quad \checkmark && \text{IA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \frac{15}{16} \ln(t^2+100) \\
 &= \frac{15}{16} \frac{(2t)}{(t^2+100)} \\
 &= \frac{15t}{8(t^2+100)} \quad \checkmark && \text{IA}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{15}{8} \left[ \frac{t^2+100 - t(2t)}{(t^2+100)^2} \right] = \frac{15}{8} \left( \frac{100-t^2}{(t^2+100)^2} \right) \quad \checkmark \quad \text{IA}$$

$$\text{For } 0 < t < 10, \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{dy}{dt} \right) > 0$$

$\therefore$  The amount produced by B is a under-estimate ~~X~~

$\therefore$  B is more productive than A ~~X~~

Answers written in the margins will not be marked.



# 答卷示例 - 表現良好

## 題13

13 a) $X \sim N(6.6, 1.2)$		
$P(X > 6) = P\left(Z > \frac{6-6.6}{\sqrt{1.2}}\right)$ ✓		1M
$= 0.5 + 0.1915$		
$= 0.6915$ ✓		1A
b) (i) $Y \sim B(0.6915, 12)$		
$P(Y > 10) = C_{11}^{12} (0.6915)^{11} (1-0.6915) + C_1^{12} (0.6915)^{12}$ 1M 1M		
$= 0.0759$ ✓		1A
(ii) $\bar{X} \sim N(6.6, 0.12)$ ✓		1A
$P(\bar{X} > 6) = P\left(Z > \frac{6-6.6}{\sqrt{0.12}}\right)$		
$= 0.5 + 0.4584$		
$= 0.9584$ ✓		1A
c) (i) $P(X < k) = 0.2119$ $W \sim N(\mu, 0.8^2)$		
$P\left(Z < \frac{k-6.6}{\sqrt{1.2}}\right) = 0.2119$ ✓ 1M $P(W > 5.64) = 0.0359$		
$\frac{k-6.6}{\sqrt{1.2}} = -0.8$ $P\left(Z > \frac{5.64-\mu}{0.8}\right) = 0.0359$ 1M		
$k = 5.64$ ✓ 1A $\frac{5.64-\mu}{0.8} = 1.8$		
$\mu = 6.2$ ✓ 1A		
(ii) $P(X > 4.2)$ $P(W > 4.2)$		
$= P\left(Z > \frac{4.2-6.6}{\sqrt{1.2}}\right)$ $= 0.5$ ( $\because$ mean value = 4.2)		
$= 0.5 + 0.4772$		
$= 0.9772$ ✓		1A
The required prob		
$= \frac{C_1^{12} (0.88)(0.12)}{(0.9772)(0.5)}$ X		
$= 0.4323$ X		

Answers written in the margins will not be marked.



# 答卷示例 – 表現中等

## 題6

6. A random sample of size 10 is drawn from a normal population with mean  $\mu$  and variance 8. Let  $\bar{X}$  be the mean of the sample.

(a) Calculate  $\text{Var}(2\bar{X}+7)$ .

(b) Suppose the mean of the sample is 50. Construct a 97% confidence interval for  $\mu$ .

(5 marks)

$$6 \ a) \ \bar{X} \sim N\left(\mu, \sqrt{\frac{8}{10}}\right)^2$$

$$\text{Var}(2\bar{X}+7)$$

$$= 2^2 \text{Var}(\bar{X})$$

$$= 4\left(\frac{8}{10}\right) \quad \checkmark$$

1M

$$= 3.2 \quad \checkmark$$

1A

b) A 97% confidence interval for  $\mu$

$$= \left(50 - 2.17 \times \frac{8}{10}, 50 + 2.17 \times \frac{8}{10}\right) \quad \checkmark \quad 1M+1A$$

$$= (48.264, 51.736) \quad \times$$



# 答卷示例 – 表現中等

## 題8

8. 某農場把其出產的雞蛋裝入箱子中，每個箱子盛有 30 隻雞蛋。一隻隨機選取的雞蛋是變壞雞蛋的概率為 0.04。

(a) 求某個箱子盛有超過 1 隻變壞雞蛋的概率。

(b) 現逐一檢查雞蛋箱子。

(i) 求第 6 個被檢查的箱子為第 1 個發現盛有超過 1 隻變壞雞蛋的箱子的概率。

(ii) 求在首次發現盛有超過 1 隻變壞雞蛋的箱子時所曾檢查過的箱子數目的期望值。

(7分)

$$8(a) \text{ 所求概率} \\ = 1 - C_0^{30} (1-0.04)^{30} - C_1^{30} (0.04)(1-0.04)^{29} \quad \checkmark \text{IM+IM} \\ \approx 0.338820$$

$$= 0.3388 \quad \checkmark \text{IA}$$

$$(b)(i) P = (1-0.338820)^5 (0.338820) \quad \checkmark \text{IM} \\ \approx 0.0428121$$

$$= 0.0428 \quad \checkmark \text{IA}$$

$$(ii) \text{ 期望值} = \frac{1}{0.0428} \\ \approx 23.36 \text{ 個} \quad \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}$$





# 答卷示例 – 表現稍遜

## 題1

1. (a) 展開  $(2x+1)^3$ 。

(b) 依  $x$  的升冪次序展開  $e^{-ax}$  到含  $x^2$  的項為止，其中  $a$  為常數。

(c) 若在  $\frac{(2x+1)^3}{e^{ax}}$  的展式中， $x^2$  項的係數是  $-4$ ，求  $a$  的值。

(5分)

$$\begin{aligned} 1 \text{ (a)} \quad (2x+1)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2 + 3(2x) + 1 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \quad \checkmark \quad 1A \end{aligned}$$

$$(b) \quad e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \dots \quad \checkmark \quad 1A$$

$$(c) \quad \frac{(2x+1)^3}{e^{ax}} = \frac{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}{1 + ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \dots} \quad \times$$

$$\therefore x^2 \text{ 的係數是 } = 12(1) + 8 \cdot \frac{1}{a} = -4 \quad \times$$

$$a = -\frac{1}{2} \quad \times$$



# 答卷示例 – 表現稍遜

## 題5

5. 考慮曲線  $C_1: y = 1 - \frac{e}{e^x}$  及曲線  $C_2: y = e^x - e$ 。

(a) 求  $C_1$  及  $C_2$  所有交點的  $x$  坐標。

(b) 求  $C_1$  及  $C_2$  所圍成區域的面積。

(5分)

$$5 a) 1 - \frac{e}{e^x} = e^x - e$$

$$-e = e^{2x} - e^x \cdot e - e^2$$

$$e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$$

$$(e^x - e)(e^x - 1) = 0$$

$$e^x = e \text{ 或 } 1$$

$$x = 1 \text{ 或 } 0$$

$$b) \int_0^1 (e^x - e) - (1 - \frac{e}{e^x}) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x - e - 1 + e}{e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x} dx$$

$$= \int_0^1 1 - e^{-x} dx$$

$$= [x + e^{-x}]_0^1$$

$$= 1.3679$$

X OA



# 一般建議

---

學生應注意下列各點：

- 審題要小心，表達要清晰及有條理
- 應掌握數學技巧背後的概念
- 基本上學生已明白概率的法則。然而，學生應列舉題目中所有的相關結果以求所須概率



# 一般建議

---

- 應在積分法、正態分佈、概率等範疇中使用適當的符號
- 應多接觸不同形式的題目及多掌握基本概念
- 應多注意長題目中不同部分的相互關係
- 在所有運算過程中，應保留較多的小數位，以便最後得到準確答案



---

謝謝!

