

數學
延伸部分 單元二
代數與微積分
練習卷

2012 年 2 月



香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority

內容簡介

- 考試形式
- 題目介紹
- 評卷參考
- 學生表現
- 答卷示例
- 一般建議



考試形式

- 考試時間：2小時30分鐘
- 本單元只考一卷
- 全卷分爲兩部，全部題目均須作答
- 學生須具有必修部分及初中課程基礎部分及非基礎部分的知識



題目介紹 - 題 2

考慮下列 x , y , z 的線性方程組

$$\begin{cases} x - 7y + 7z = 0 \\ x - ky + 3z = 0 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases} \quad , \text{其中 } k \text{ 爲實數。}$$

若上述方程組有非平凡解，求 k 的兩個可取值。

- 齊次三元線性方程組的非平凡解的理解
- 這是此課題中較簡單直接的題型



題目介紹 - 題 5

(a) 已知對任意實數 x ， $\cos(x+1) + \cos(x-1) = k \cos x$ 。
求 k 的值。

(b) 不用計算機，求 $\begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6 \\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9 \end{vmatrix}$ 的值。

- 此題要求學生應用三角函數的和積互化公式及行列式的基本性質



題目介紹 - 題 8

(a) 利用代換積分法，求 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 。

(b) 利用分部積分法，求 $\int \ln x dx$ 。

- 應用代換法及分部積分法求不定積分
- 此題所示的積分是常見的類型



題目介紹 - 題 10

(a) 求 $\int x e^{-x^2} dx$ 。

- (b) 圖 1 所示陰影部分由曲線 $y = \frac{x^2}{2}$ 及 $y = e^{-x^2}$ 圍成，其中 $1 \leq x \leq 2$ 。
- 現把該陰影部分繞 y 軸旋轉，得一旋轉體，求該旋轉體的體積。

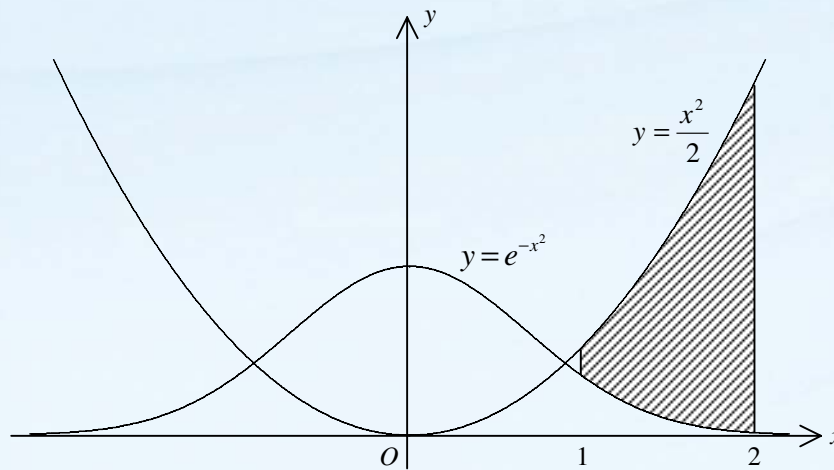


圖 1

- 定積分及外殼法的應用，所示積分較為複雜



題目介紹 - 題 12

設 $\vec{OA}=\mathbf{i}$ ， $\vec{OB}=\mathbf{j}$ 和 $\vec{OC}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ （見圖 2）。設 M 和 N 分別為直線 AB 和 OC 上的點，使得 $AM:MB=a:(1-a)$ 和 $ON:NC=b:(1-b)$ 其中 $0 < a < 1$ 和 $0 < b < 1$ 。假設 MN 同時垂直於 AB 和 OC

(a) (i) 證明 $\vec{MN} = (a+b-1)\mathbf{i} + (b-a)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ 。

(ii) 求 a 和 b 的值。

(iii) 求直線 AB 與 OC 之間的最短距離。

(b) (i) 求 $\vec{AB} \times \vec{AC}$ 。

(ii) 設 G 為 O 點在平面 ABC 上的投影，求直線 OG 與 MN 的交點的坐標。

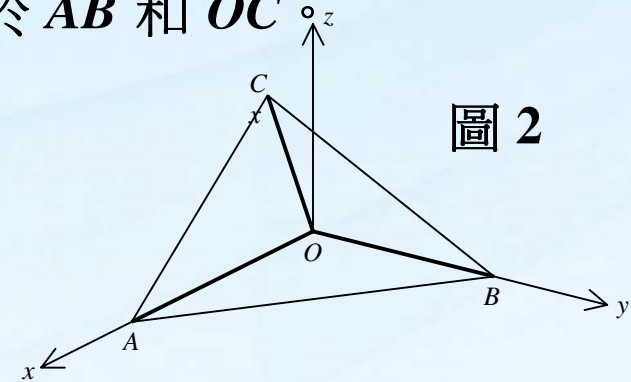


圖 2

- 三維向量題，不包括在附加數學或純粹數學內



題目介紹 - 題 13

(a) 設 $f(x)$ 於 $-p \leq x \leq p$ 為奇函數，其中 p 為正常數。

證明 $\int_0^{2p} f(x-p) dx = 0$ 。由此計算 $\int_0^{2p} [f(x-p) + q] dx$ ，

其中 q 為常數。

(b) 證明
$$\frac{\sqrt{3} + \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} - \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{2}。$$

(c) 利用(a)及(b)，或其他方法，計算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) dx$ 。

● 應用函數性質以證明及計算積分



評卷參考 - 題 2

1M : 給利用行列式等於零

1A : 給寫出正確的行列式

1M : 給能展開所寫出的行列式

1A : 給正確答案



評卷參考 - 題 5

(a)

1M : 給利用餘弦的和化積或複角公式

1A : 給 k 的正確答案

(b)

1M : 給列（或行）的運算

1A : 給利用**(a)**或餘弦的和化積公式

1M : 給利用行列式性質因式分解行列式

1A : 給正確答案



評卷參考 - 題 13

(a)

1M : 給利用代換法

1A : 給代換後正確的積分

1 : 給正確完成證題

1A : 給正確答案

(b)

1M : 給利用正切的複角公式

1 : 給正確完成證明



評卷參考 - 題 13

(c)

1M : 給變換被積函數

1M : 給證明奇函數

1A : 給正確結論

1A : 給正確答案



學生表現 - 題 1、2

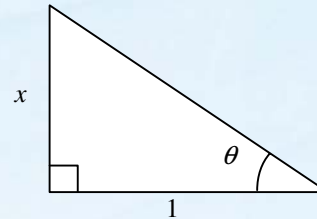
- 整體表現良好
- 在題 1，部分學生誤將通項寫為 $C_r^9 2^{9-r} x^r$
- 在題 2，部分學生以高斯消去法解題，但未能完成



學生表現 - 題 4

- 整體表現良好
- 部分學生只考慮 x 為正數的情況，

即 $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



- 很多學生於設 $x = \tan \theta$ 時，未有考慮其取值範圍



學生表現 - 題 5

- 在(a)，部分學生誤將 $\cos 1$ 當作 $\cos 1^\circ$ 處理
- 在(b)，很多學生先將行列式展開，但均未能得出正確答案



學生表現 - 題 9

- 常犯錯誤不在微分步驟，而在化簡過程
- 本題所設曲線為二次圓錐曲線，亦有部分學生以切線與曲線相交於兩相同點解之



學生表現 - 題 11

- 整體表現良好
- 很多學生能掌握矩陣的運算
- 在 (c)，不少學生未有證明 $XY = YX = \mathbf{0}$ ，
便應用等式 $A^n = X^n + Y^n$



學生表現 - 題 12

- 整體表現良好
- 在(a)及(b)(i) ，很多學生能掌握三維向量加法和乘法的運算
- 在 (b)(ii) ，很多學生未能掌握以向量方法解兩直線的交點



學生表現 - 題 13、14

- 此兩題乃附加數學及純粹數學常見的積分題型
- 在各題(a)，很多學生頗能掌握微積分基本技巧，惟學生在化簡及運算上常犯錯誤，以致未能完成題目最後的部分



答卷示例 – 表現良好

題 10

Quest 10 II QUESTION 10

a) $\int x e^{-x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx^2$ 1M
 $= -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2)$
 $= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$ (where C is a constant) ✓ 1A

b) The volume of revolution
 ~~$= \int_1^2 2\pi x dx$~~
 ~~$= \pi(2)^2 - \pi(1)^2 = \pi(4-1) = 3\pi$~~
 ~~$= \int_1^2 2\pi x (e^{-x^2}) dx = \int_1^2 2\pi x (\frac{x^2}{2}) dx$~~
 $= \int_1^2 2\pi x (\frac{x^2}{2}) dx - \int_1^2 2\pi x (e^{-x^2}) dx$ ✓ 1M+1A
 $= \int_1^2 \pi x^3 dx - \int_1^2 2\pi x e^{-x^2} dx$
 $= \frac{\pi x^4}{4} \Big|_1^2 + \pi e^{-x^2} \Big|_1^2$ ✓ 1M
 $= \left(\frac{2^4 \pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + \left(\pi e^{-4} - \pi e^{-1} \right)$
 $= 4\pi - \frac{\pi}{4} + \pi \left(\frac{1}{e^4} - \frac{1}{e} \right)$
 $= \frac{15\pi}{4} + \pi \left(\frac{1-e^3}{e^4} \right)$
 ~~$= \frac{15}{16} \pi + \pi \left(\frac{1-e^3}{e^4} \right)$~~
 ~~$= \frac{15}{16} \pi + \pi \left(\frac{1-e^3}{e^4} \right)$~~
~~X~~



答卷示例 - 表現良好

題 13

a. $f(x) = f(-x)$ ← For odd function,

$$\int_0^{2p} f(x-p) dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{Let } u = x-p \quad 1M \\ du = dx. \\ \text{When } x=2p, u=p \\ \text{When } x=0, u=-p. \end{array} \right)$$

$$= \int_{-p}^p f(u) du$$

$$= \int_0^p f(u) du + \int_{-p}^0 f(u) du$$

$$= \int_0^p f(x) dx + \int_{-p}^0 f(x) dx$$

$$= \int_0^p f(x) dx - \int_0^p f(-x) dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{Let } t = -x \quad 1M \\ dt = -dx. \\ \text{When } x=0, t=0 \\ \text{When } x=-p, t=p. \end{array} \right)$$

$$= \int_0^p f(x) dx + \int_p^0 f(t) dt$$

$$= \int_0^p f(x) dx - \int_0^p f(t) dt$$

$$= \int_0^p f(x) dx - \int_0^p f(x) dx$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

$$\int_0^{2p} [f(x-p) + q] dx$$

$$= \int_0^{2p} f(x-p) dx + \int_0^{2p} q dx$$

$$= q \times 2p$$

$$= 2pq \quad \checkmark \quad 1A$$

b. $\frac{\sqrt{3} + \tan(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - \tan(x - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{3} + \frac{\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{\tan x}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{3} - \frac{\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{\tan x}{\sqrt{3}}}} \quad 1M$

$$= \frac{\sqrt{3}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan x) + \tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan x) - \tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \tan x + \tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \tan x - \tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2 \tan x + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{6 \tan x + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8\sqrt{3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{6 \tan x + 2\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 \tan x + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x + 1} \quad \checkmark \quad 1$$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sqrt{3} \tan x) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{2} \times 2\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln\left(\frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{2}\right) + \ln 2] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{\sqrt{3} + \tan(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - \tan(x - \frac{\pi}{6})}\right] dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx \quad 1M$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sqrt{3} + \tan(x - \frac{\pi}{6})) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sqrt{3} - \tan(x - \frac{\pi}{6})) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx$$

$$= \ln 2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad \checkmark \quad 1A$$



答卷示例 – 表現中等

題 5

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \cos(x+1) + \cos(x-1) = k \cos x \\
 & 2 \cos \frac{(x+1)+(x-1)}{2} \cos \frac{(x+1)-(x-1)}{2} = k \cos x \quad \checkmark \quad 1M \\
 & 2 \cos \frac{2x}{2} \cos \frac{2}{2} = k \cos x \\
 & 2 \cos x \cos(1) = k \cos x \\
 & 2 \cos(1) = k \quad \checkmark \quad 1A \\
 & k = 2.000 \quad \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6 \\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9 \end{vmatrix} = \cos 1 (\cos 5 \cos 9 - \cos 6 \cos 8) \\
 & \quad - \cos 2 (\cos 4 \cos 9 - \cos 6 \cos 7) \\
 & \quad + \cos 3 (\cos 4 \cos 8 - \cos 5 \cos 7) \\
 & = \frac{\cos 1}{2} [\cos 14 + \cos 4] - (\cos 14 + \cos 2) \\
 & \quad - \frac{\cos 2}{2} [\cos 13 + \cos 5] - (\cos 13 + \cos 7) \\
 & \quad + \frac{\cos 3}{2} [(\cos 12 + \cos 4) - (\cos 12 + \cos 2)] \\
 & = \frac{\cos 1}{2} (\cos 4 - \cos 2) - \frac{\cos 2}{2} (\cos 5 - \cos 1) \\
 & \quad + \frac{\cos 3}{2} (\cos 4 - \cos 2) \\
 & = \frac{(\cos 4 - \cos 2)(\cos 1 + \cos 3)}{2} \quad \times
 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



答卷示例 – 表現中等

題 12

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\
 &= \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \vec{k}\right) - \left((-a)\vec{i} + (a)\vec{j}\right) \quad 1M \\
 &= \left(\frac{1}{3} + a\right)\vec{i} + \left(\frac{2}{3} - a\right)\vec{j} + \vec{k} \\
 &= (b+1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + \vec{k} \quad \checkmark \quad 1 \\
 \text{(ii)} \quad &\vec{AB} \perp \vec{OC} \Rightarrow \text{both } \vec{AB} \text{ and } \vec{OC} \\
 &\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 0 \text{ and } \vec{AB} \cdot \vec{OC} \neq 0 \quad 1M+1M \\
 \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \quad \left[(a+b+1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + \vec{k} \right] \cdot \left[\frac{1}{3}\vec{i} - \vec{j} \right] = 0 \quad \text{--- ①} \\
 &= \vec{i} - \vec{j} \quad \left[(a+1)\vec{i} + (1-a)\vec{j} + b\vec{k} \right] \cdot \left[\frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right] = 0 \\
 &\quad \text{①} \quad 1-a-b+b-a=0 \\
 &\quad \quad \quad -2a=1 \\
 &\quad \quad \quad a = \frac{1}{2} \quad \checkmark \quad 1A \\
 &\quad \text{②} \quad a+b-1+b-a+b=0 \\
 &\quad \quad \quad 3b-1=0 \\
 &\quad \quad \quad b = \frac{1}{3} \quad \checkmark \quad 1A \\
 \text{(iii)} \quad &\text{The distance is } |\vec{OC}| \\
 &= \left| \left(1 - \frac{1}{2}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \right| \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \times \\
 \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} \quad \text{b/c } \vec{AB} \times \vec{AC} \\
 &= \vec{i} + \vec{k} \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (b+1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{i} + \vec{k} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (b+1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{i} + \vec{k} \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \checkmark \quad 1A
 \end{aligned}$$

對於未出現以外的答案，將不予理會。



答卷示例 - 表現稍遜

題 3

3. 設命題為 $P(n)$.

當 $n = 1$ 時

$$4^{(1)} + 15(1) - 1 = 18 \quad (\text{它能整除 } 9)$$

$\therefore P(1)$ 為真

$$\text{即 } 4^k + 15(k) - 1 = 9M \quad (M \text{ 為正整數})$$

假設 $P(k)$ 為真.

$$4^k + 15(k) - 1 = 9M$$

當 ~~$n = k$~~ $n = k+1$ 時,

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1$$

$$\begin{aligned} &= 4^k + 4 + 15k + 15 - 1 + 1 \\ &= 4^k + 15k + 4 + 15 - 1 + 1 \end{aligned}$$

$$= 4^k + 15k - 1 + 4 + 15 - 1 + 1$$

$$= 4^k + 15k - 1 + 4 + 15 - 1 + 1$$

$$= 9M + 18 + 9 \times \frac{1}{9}$$

$$= 9(M+2) + 9 \times \frac{1}{9}$$

$$= 9(M+2 + \frac{1}{9})$$

$$= 9(M + \frac{19}{9}) \quad (\text{也能整除 } 9)$$

$\therefore P(2)$ 為真.

\therefore 利用數學歸納法 $P(n)$ 為真, 對於所有正整數 n , $4^n + 15n - 1$ 可被 9 整除.



答卷示例 – 表現稍遜

題 1

$$\begin{aligned} & 1. (2-x)^9 \quad \text{[scribbles]} \\ & \text{[scribbles]} = \text{[scribbles]} \\ & = [C_0^9 2^9 + C_1^9 2^8 x + C_2^9 2^7 x^2 + C_3^9 2^6 x^3 + C_4^9 2^5 x^4 + C_5^9 2^4 x^5 + \dots] \quad | M \\ & = [2^9 + 9(2^8)x + 36(2^7)x^2 + 84(2^6)x^3 + 126(2^5)x^4 + 126(2^4)x^5 + \dots] \\ & = [512 + 2304x + 4608x^2 + 5376x^3 + 4032x^4 + 2016x^5 + \dots] \end{aligned}$$



一般建議

學生應注意下列各點：

- 應小心運算多項式及代數式
- 審題要小心，留意每個變數的特定條件



一般建議

- 掌握一些基本數學課題，如二項定理、數學歸納法及從基本原理求微分等
- 宜掌握定積分的應用及三維向量的概念



謝謝!



香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority